Wprowadzenie do logiki epistemicznej. Wielopodmiotowe (*multiagent*) logiki wiedzy

(notatki do wykładów)

Andrzej Wiśniewski
Andrzej.Wisniewski@amu.edu.pl

wersja beta 1.0

Rozważane dotąd systemy logiki epistemicznej charakteryzowały nastawienia sądzeniowe pojedynczego – wyidealizowanego - podmiotu (*agent*). W ***wielopodmiotowych*** (*multiagent*) ***logikach epistemicznych*** rozważa się nastawienia sądzeniowe wielu podmiotów. Co więcej, charakteryzuje się pewne nastawienia sądzeniowe grupy podmiotów, takie jak „wiedza wspólna”, „wiedza rozproszona” i inne.

Wielopodmiotowe logiki epistemiczne mogą być zarówno logikami multimodalnymi, jak i „monomodalnymi”. Na tym wykładzie zajmiemy się wyłącznie pewnymi wielopodmiotowymi logikami wiedzy opartymi na ***S5***.

Nie trzeba chyba dodawać, że istnieją również bardziej wyrafinowane wielopodmiotowe logiki wiedzy.

Wykład będzie bardziej opowieścią niż szczegółową prezentacją.

1. Wprowadzenie wielu operatorów wiedzy

Zamiast jednym operatorem wiedzy $\mathbf{K}$ operujemy wieloma operatorami wiedzy: $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ..., $\mathbf{K}_m$, gdzie $m > 1$. Operatory te odnoszą się do wiedzy podmiotów 1, 2, ..., m.

Możemy teraz wyrażać pewne fakty/ zależności dotyczące nie tylko wiedzy pojedynczego podmiotu, ale wiedzy wielu różnych podmiotów.

Przykładowo, formuła:

$$\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 p$$

stwierdza, że podmiot 1 wie, że podmiot 2 wie, że p, natomiast formuła:

$$\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 p \wedge \neg\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 p$$

stwierdza, że podmiot 2 wie, że podmiot 1 wie, że p oraz nie jest tak, że podmiot 1 o tym wie.

2. Aksjomaty i pierwotne reguły inferencyjne dla $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ..., $\mathbf{K}_m$

Budując wielopodmiotową logikę wiedzy na bazie ***S5***, zakładamy, że każdy operator wiedzy $\mathbf{K}_i$ (i = 1, ..., m) spełnia aksjomaty rachunku ***S5***.

Dla uproszczenia, nie wprowadzimy tutaj modalności dualnych do $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ..., $\mathbf{K}_m$. Aksjomaty dla operatorów $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ..., $\mathbf{K}_m$ podpadają pod schematy:

($\mathbf{K}_{\mathbf{K}_i}$) $\quad \mathbf{K}_i(p \to q) \to (\mathbf{K}_i p \to \mathbf{K}_i q)$

($\mathbf{T}_{\mathbf{K}_i}$) $\quad \mathbf{K}_i p \to p$

($\mathbf{5}_{\mathbf{K}_i}$) $\quad \neg\mathbf{K}_i p \to \mathbf{K}_i \neg\mathbf{K}_i p$

Dla każdego $\mathbf{K}_i$ obowiązuje reguła Gödla:

$$\frac{A}{\mathbf{K}_i A}$$

Rzecz jasna mamy również aksjomaty rachunkowozdaniowe, regułę podstawiania i regułę odrywania. Ponieważ nie wprowadziliśmy modalności dualnych do $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ..., $\mathbf{K}_m$, nie musimy też wprowadzać reguły zastępowania.

3. Semantyka: wielorelacyjne struktury modelowe

Analiza semantyczna oparta jest na *wielorelacyjnych strukturach modelowych*:

$$<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, ..., \boldsymbol{R}_n>$$

gdzie $\boldsymbol{W}$ jest niepustym zbiorem („możliwych światów”), $n > 1$ oraz $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, ..., $\boldsymbol{R}_n$ są binarnymi relacjami w $\boldsymbol{W}$.

Gdy jedynymi rozważanymi nastawieniami sądzeniowymi są $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ..., $\mathbf{K}_m$, to odwołujemy się do wielorelacyjnej struktury modelowej postaci:

$$<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, ..., \boldsymbol{R}_m>$$

w której $\boldsymbol{R}_i$ ($1 \leq i \leq m$) interpretujemy, intuicyjnie rzecz biorąc, jako relację epistemicznej alternatywności podmiotu *i*. <u>Na potrzeby tego wykładu o każdej relacji $\boldsymbol{R}_i$ zakładamy, że jest ona równoważnościowa w $\boldsymbol{W}$</u>.

Model oparty na wielorelacyjnej strukturze modelowej:

$$\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n \rangle$$

otrzymujemy – mówiąc ogólnie – uzupełniając tę strukturę o funkcję wartościowania ***V***.

Warunek dla formuł postaci $\mathbf{K}_i A$ ma postać:

- $\boldsymbol{V}(\mathbf{K}_i A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takiego, że* $\boldsymbol{w}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{w}^*$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

4. Wiedza grupy (*group knowledge*)

Niech $\{1, 2, \ldots, m\}$ reprezentuje grupę wielu podmiotów.

4.1. „Everybody knows"

Można wprowadzić nowy operator epistemiczny $\mathbf{K}^{\mathrm{e}}$, który czytamy „każdy [w grupie] wie, że" (*everybody knows*).

Patrząc od strony syntaktycznej, dodajemy nowy aksjomat:

$(\mathbf{KK}^{\mathrm{e}})$ $\qquad \mathbf{K}^{\mathrm{e}}p \leftrightarrow \mathbf{K}_1 p \wedge \mathbf{K}_2 p \wedge \ldots \wedge \mathbf{K}_m p.$

Analiza semantyczna wymaga wprowadzenia wielorelacyjnej struktury modelowej postaci:

$$<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, ..., \boldsymbol{R}_m, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}>$$

gdzie $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}$ jest binarną relacją w $\boldsymbol{W}$ definiowaną następująco:

$$\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e} = \bigcup_{i=1}^{m} \boldsymbol{R}_i$$

(czyli $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}$ jest <u>sumą</u> relacji $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, ..., $\boldsymbol{R}_m$). Model definiujemy w standardowy sposób; warunek dla formuł postaci $\mathbf{K}^eA$ jest następujący:

- $\boldsymbol{V}(\mathbf{K}^eA, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takiego, że* $\boldsymbol{w}\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}\boldsymbol{w}^*$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

Aksjomat ($\mathbf{KK}^e$) jest prawdziwy w każdym modelu rozważanego rodzaju. Proste rozważania pokazują, że własność tę mają również (między innymi) następujące formuły:

($\mathbf{K}_{\mathbf{K}^e}$) $\mathbf{K}^e(p \to q) \to (\mathbf{K}^ep \to \mathbf{K}^eq)$

($\mathbf{T}_{\mathbf{K}^e}$) $\mathbf{K}^ep \to p$

Ponadto obowiązuje reguła Gödla dla $\mathbf{K}^e$:

$$\frac{A}{\mathbf{K}^e A}$$

Nie jest natomiast tak, że w każdym modelu analizowanego rodzaju prawdziwe są odpowiedniki formuł **4** i **5** dla $\mathbf{K}^e$. Tak zresztą powinno być. Dlaczego? Cóż – zapraszam na wykład :)

4.2. „Distributed/ implicit knowledge"

Wiedza grupy może być rozproszona pomiędzy jej członków; nie zawsze jest tak, że każdy członek grupy wie to, co inny. Na skutek komunikacji/ współpracy może się jednak zdarzyć, że – po odpowiedniej ilości „rund" – alternatywy epistemiczne przyjmowane przez wszystkich członków grupy stają się tożsame.

Wprowadźmy nowy operator epistemiczny $\mathbf{K}^d$, zwany operatorem wiedzy rozproszonej (*distributed knowledge*) lub wiedzy tła (*implicit knowledge*). Uczynimy to semantycznie.

Po pierwsze, rozważymy wielorelacyjną strukturę modelową:

$$<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, ..., \boldsymbol{R}_m, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^d}>$$

w której „nowa” relacja binarna $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^d}$ jest definiowana następująco:

$$\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^d} = \bigcap_{i=1}^{m} \boldsymbol{R}_i$$

czyli jako <u>iloczyn</u> relacji $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, ..., \boldsymbol{R}_m$. Określając model, nakładamy następujący warunek na formuły postaci $\mathbf{K}^d A$:

- $\boldsymbol{V}(\mathbf{K}^d A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takiego, że* $\boldsymbol{w}\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^d}\boldsymbol{w}^*$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

Jest oczywiste, że w każdym modelu analizowanego rodzaju prawdziwa jest formuła:

$$\mathbf{K}_i p \to \mathbf{K}^d p$$

(a zatem również wszystkie jej podstawienia, jako że obowiązuje reguła podstawiania). Obowiązuje również reguła Gödla dla $\mathbf{K}^d$. Ponadto $\mathbf{K}^d$ - mówiąc ogólnie – „spełnia” aksjomaty systemu ***S5***.

4.3. „Common knowledge"

Tym razem idea jest następująca: coś jest elementem wspólnej wiedzy grupy wówczas, gdy każdy członek grupy to wie, każdy członek grupy wie, że każdy członek grupy to wie, każdy członek grupy wie, że każdy członek grupy wie, że każdy członek grupy to wie – i tak *ad infinitum*. Aby ją wyrazić, wprowadzamy operator wiedzy wspólnej (*common knowledge*) $\mathbf{K}^c$.

Zacznijmy od semantyki. Uzupełnijmy rozważaną poprzednio wielorelacyjną strukturę modelową:

$$<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_m, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^d}>$$

o nową relację binarną, $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^c}$, definiowaną następująco:

- $\forall \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^c}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^*)$ *wtw istnieje ciąg* $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ *elementów* $\boldsymbol{W}$ *taki, że* (a) $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}$; (b) $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{w}^*$; (c) $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_{i+1})$ *dla* $1 \leq i \leq k$-1.

Innymi słowy, $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^c}$ jest <u>przechodnim domknięciem</u> relacji $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}$ w $\boldsymbol{W}$.

Definiując model, wprowadzamy rzecz jasna następujący warunek dla formuł postaci $\mathbf{K}^{c}A$:

- ○ $\boldsymbol{V}(\mathbf{K}^{c}A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takiego, że* $\boldsymbol{w}\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^{c}}\boldsymbol{w}^*$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

Można pokazać, że następujące formuły (a zatem i wszystkie ich podstawienia!) są prawdziwe w każdym modelu rozważanego rodzaju:

$(\mathbf{K}_{\mathbf{K}^{c}})$	$\mathbf{K}^{c}(p \to q) \to (\mathbf{K}^{c}p \to \mathbf{K}^{c}q)$
$(\mathbf{T}_{\mathbf{K}^{c}})$	$\mathbf{K}^{c}p \to p$
$(\mathbf{K}_{\mathbf{K}^{d}})$	$\mathbf{K}^{d}(p \to q) \to (\mathbf{K}^{d}p \to \mathbf{K}^{d}q)$
$(\mathbf{T}_{\mathbf{K}^{d}})$	$\mathbf{K}^{d}p \to p$
$(\mathbf{4}_{\mathbf{K}^{d}})$	$\mathbf{K}^{d}p \to \mathbf{K}^{d}\mathbf{K}^{d}\, p$
$(\mathbf{5}_{\mathbf{K}^{d}})$	$\neg\mathbf{K}^{d}p \to \mathbf{K}^{d}\,\neg\mathbf{K}^{d}p$
$(\mathbf{K}\mathbf{K}^{e})$	$\mathbf{K}^{e}p \leftrightarrow \mathbf{K}_1p \wedge \mathbf{K}_2p \wedge \ldots \wedge \mathbf{K}_mp$
$(\mathbf{K}^{e}\mathbf{K}^{c})$	$\mathbf{K}^{c}p \to \mathbf{K}^{e}\mathbf{K}^{c}p$
$(\mathbf{K}^{c}\text{-}ind)$	$\mathbf{K}^{c}(p \to \mathbf{K}^{e}p) \to (p \to \mathbf{K}^{c}p)$

Dodając do powyższych formuł wszystkie formuły postaci:

($\mathbf{K}_{\mathbf{K}_i}$) $\mathbf{K}_i (p \to q) \to (\mathbf{K}_i p \to \mathbf{K}_i q)$

($\mathbf{T}_{\mathbf{K}_i}$) $\mathbf{K}_i p \to p$

($\mathbf{5}_{\mathbf{K}_i}$) $\neg \mathbf{K}_i p \to \mathbf{K}_i \neg \mathbf{K}_i p$

gdzie $1 \leq i \leq m$, otrzymujemy aksjomatykę (pewnej wersji) wielopodmiotowej logiki wiedzy, opartej na ***S5***. Pierwotnymi regułami inferencyjnymi systemu aksjomatycznego tej logiki są, obok reguły odrywania i reguły podstawiania, reguły podpadające pod schemat:

$$\frac{A}{\mathbf{K}_i A}$$

oraz reguła:

$$\frac{A}{\mathbf{K}^{c} A}$$

Przedstawiona wielopodmiotowa logika wiedzy oznaczana jest jako $\boldsymbol{S5}\mathbf{ECD}_m$.

Semantyka typu Kripkego dla tej logiki oparta jest na wielorelacyjnych strukturach modelowych postaci:

$$\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_m, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^d}, \boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^c} \rangle$$

gdzie $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_m$ są równoważnościowymi binarnymi relacjami w $\boldsymbol{W}$, natomiast $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^e}$, $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^d}$, $\boldsymbol{R}_{\mathbf{K}^c}$ są binarnymi relacjami w $\boldsymbol{W}$ spełniającymi warunki omówione na kolejnych częściach tego wykładu.

Uwagi:

Wykład ten został oparty (w zasadzie, z nieistotnymi różnicami, głównie notacyjnymi) na artykule przeglądowym:

- J.J. Ch. Meyer, *Epistemic Logic*, w: L. Goble (ed.), ***The Blackwell Guide to Philosophical Logic***, Blackwell Publishing, 2002, s.183-202.

Informacje o bardziej wyrafinowanych wielopodmiotowych logikach epistemicznych – oraz o wielu logikach epistemicznych, których na tych zajęciach nie omówię – mogą Państwo (m.in.) znaleźć w artykule przeglądowym:

- P. Gochet, P. Gribomont, *Epistemic Logic*, w: D. Gabbay & J. Woods, ***Handbook of the History of Logic, Volume 7: Logic and the Modalities in the Twentieth Century***, Elsevier-North Holland 2006, s.99-195.